Übung 2, Aufgabe 4)

a) Da die Zahlen im IEEE-32Bit-Format dargestellt werden sollen, ist der Bias = 127.

<u>1,125 in IEEE 754 (32Bit)</u>

1. Dezimalzahl in Binärzahl umwandeln

   ```
     1 / 2 = 0 Rest 1
   ```

   $0{,}125 \cdot 2 = 0{,}25$
   $0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5$
   $0{,}5 \cdot 2 = 1$

   $\rightarrow 1{,}125_{10} = 1{,}001_{2}$

2. Normalisierung
   Da die Zahl bereits normalisiert ist, bleibt der Exponent bei 0.
   $1{,}001 \cdot 2^{0}$

3. Vorzeichenbit (VZ) bestimmen
   Die Zahl ist positiv, also hat das Vorzeichenbit den Wert 0.

4. Exponent berechnen
   Von der normalisierten Binärzahl $1{,}001 \cdot 2^{0}$ ist der Exponent 0.

   Bias mit einbeziehen:
   darzustellender Exponent = Exponent + Bias = 0 + 127 = 127

   Exponent in eine Binärzahl umwandeln:

   ```
   127 / 2 = 63 Rest 1
    63 / 2 = 31 Rest 1
    31 / 2 = 15 Rest 1
    15 / 2 =  7 Rest 1
     7 / 2 =  3 Rest 1
     3 / 2 =  1 Rest 1
     1 / 2 =  0 Rest 1

   Exponent = 01111111
   ```

5. Gleitkommazahl bilden
   Die Mantisse stellt den Nachkommateil der normalisierten Binärzahl dar.

   ```
   VZ Exponent Mantisse
    0 01111111 00100000000000000000000
   ```

1,5 in IEEE 754 (32Bit)

1. Dezimalzahl in Binärzahl umwandeln

```
1 / 2 = 0 Rest 1

0,5·2 = 1
```

   → $1{,}5_{10} = 1{,}1_2$

2. Normalisierung
   Da die Zahl bereits normalisiert ist, bleibt der Exponent bei 0.
   $1{,}1 \cdot 2^0$

3. Vorzeichenbit (VZ) bestimmen
   Die Zahl ist positiv, also hat das Vorzeichenbit den Wert 0.

4. Exponent berechnen
   Von der normalisierten Binärzahl $1{,}1 \cdot 2^0$ ist der Exponent 0.

   Bias mit einbeziehen:
   darzustellender Exponent = Exponent + Bias = 0 + 127 = 127

   Exponent in eine Binärzahl umwandeln:

```
127 / 2 = 63 Rest 1
 63 / 2 = 31 Rest 1
 31 / 2 = 15 Rest 1
 15 / 2 =  7 Rest 1
  7 / 2 =  3 Rest 1
  3 / 2 =  1 Rest 1
  1 / 2 =  0 Rest 1

Exponent = 01111111
```

5. Gleitkommazahl bilden
   Die Mantisse stellt den Nachkommateil der normalisierten Binärzahl dar.

```
VZ Exponent Mantisse
 0 01111111 10000000000000000000000
```

16777216,0 in IEEE 754 (32Bit)

1. Dezimalzahl in Binärzahl umwandeln

```
16777216 / 2 = 8388608 Rest 0
 8388608 / 2 = 4194304 Rest 0
 4194304 / 2 = 2097152 Rest 0
 2097152 / 2 = 1048576 Rest 0
 1048576 / 2 = 524288  Rest 0
  524288 / 2 = 262144  Rest 0
  262144 / 2 = 131072  Rest 0
  131072 / 2 = 65536   Rest 0
   65536 / 2 = 32768   Rest 0
   32768 / 2 = 16384   Rest 0
   16384 / 2 = 8192    Rest 0
    8192 / 2 = 4096    Rest 0
    4096 / 2 = 2048    Rest 0
    2048 / 2 = 1024    Rest 0
    1024 / 2 = 512     Rest 0
     512 / 2 = 256     Rest 0
     256 / 2 = 128     Rest 0
     128 / 2 = 64      Rest 0
      64 / 2 = 32      Rest 0
      32 / 2 = 16      Rest 0
      16 / 2 = 8       Rest 0
       8 / 2 = 4       Rest 0
       4 / 2 = 2       Rest 0
       2 / 2 = 1       Rest 0
       1 / 2 = 0       Rest 1
```

$\rightarrow 16777216{,}0_{10} = 1000000000000000000000000_2$

2. Normalisierung

$1000000000000000000000000_2 = 1{,}0 \cdot 2^{24}$

3. Vorzeichenbit (VZ) bestimmen

Die Zahl ist positiv, also hat das Vorzeichenbit den Wert 0.

4. Exponent berechnen

Von der normalisierten Binärzahl $1{,}0 \cdot 2^{24}$ ist der Exponent 24.

Bias mit einbeziehen:

darzustellender Exponent = Exponent + Bias = 24 + 127 = 151

Exponent in eine Binärzahl umwandeln:

```
151 / 2 = 75 Rest 1 (Least-Significant-Bit)
 75 / 2 = 37 Rest 1
 37 / 2 = 18 Rest 1
 18 / 2 =  9 Rest 0
  9 / 2 =  4 Rest 1
  4 / 2 =  2 Rest 0
  2 / 2 =  1 Rest 0
  1 / 2 =  0 Rest 1 (Most-Significant-Bit)
Exponent = 10010111
```

5. Gleitkommazahl bilden
   Die Mantisse stellt den Nachkommateil der normalisierten Binärzahl dar.

```
VZ Exponent Mantisse
 0 10010111 00000000000000000000000
```

b)

1. **Rechnung: (z_1 + z_2) + z_3**
   Bei der Addition werden die tatsächlichen Exponenten *e* (ohne Bias) betrachtet und die vollständige Mantisse *m* (mit der 1 vor dem Komma).

   z_1: e = 0, m = 1,001
   z_2: e = 0, m = 1,1

   → Da beide Exponenten gleich sind, müssen diese nicht angepasst werden.

   Nun werden die Mantissen addiert:

```
   1,001   (z1)
+  1,1     (z2)
  10,101
```

   $10{,}101 \cdot 2^0$ wird normalisiert in $1{,}0101 \cdot 2^1$

   Wir addieren z_3 hinzu:
   z_3: e = 24, m = 1,0

   Bevor die Mantissen addiert werden können, muss der Exponenten e = 1 (von 2^1) auf den Exponenten e = 24 angeglichen werden:

   $1{,}0101 \cdot 2^1 = 0{,}000000000000000000000010101 \cdot 2^{24}$

   Nun werden die Mantissen addiert:

```
  0,000000000000000000000010101
+ 1,0                              (z3)
  1,000000000000000000000010101
```

   i. **Runden zur nächstdarstellbaren Zahl**
      Wir prüfen die 24.Nachkommastelle: 1,0000000000000000000001**0**101
      → Es muss nicht gerundet werden.

```
VZ Exponent Mantisse
 0 10010111 00000000000000000000001
```

      Dies entspricht der Dezimalzahl 16777218.

ii. **Abschneiden nicht darstellbarer Stellen**
Wir schneiden das Ergebnis nach der 23ten Nachkommastelle ab und erhalten die gerundete Zahl: $1{,}00000000000000000000001 \cdot 2^{24}$

```
VZ Exponent Mantisse
 0 10010111 00000000000000000000001
```

Dies entspricht der Dezimalzahl 16777218.

2. **Rechnung: z_1 +(z_2 + z_3)**
Bei der Addition werden die tatsächlichen Exponenten *e* (ohne Bias) betrachtet und die vollständige Mantisse *m* (mit der 1 vor dem Komma).

z_2: e = 0, m = 1,1
z_3: e = 24, m = 1,0

Bevor die Mantissen addiert werden können, muss der Exponenten e = 0 (von z_2)auf den Exponenten e = 24 angeglichen werden:

$1{,}1 \cdot 2^0 = 0{,}0000000000000000000000011 \cdot 2^{24}$

Nun werden die Mantissen addiert:

$$\begin{array}{rll} & 0{,}0000000000000000000000011 & (z_2) \\ + & 1{,}0 & (z_3) \\ \hline & 1{,}0000000000000000000000011 & \end{array}$$

i. **Runden zur nächstdarstellbaren Zahl**
Wir prüfen die 24.Nachkommastelle: $1{,}00000000000000000000000\underline{\mathbf{1}}1$
→ Es wird aufgerundet: $1{,}00000000000000000000001 \cdot 2^{24}$

```
VZ Exponent Mantisse
 0 10010111 00000000000000000000001
```

Wir addieren z_1 hinzu:
z_1: e = 0, m = 1,001

Wir passen zunächst den Exponenten von z_1 auf 24 an:
$1{,}001 \cdot 2^0 = 0{,}000000000000000000000001001 \cdot 2^{24}$

Nun werden die Mantissen addiert:

$$\begin{array}{rll} & 1{,}00000000000000000000001 & \\ + & 0{,}000000000000000000000001001 & (z_1) \\ \hline & 1{,}0000000000000000000000\underline{\mathbf{1}}001 & \end{array}$$

→ Es wird aufgerundet: $1{,}00000000000000000000010 \cdot 2^{24}$

```
VZ Exponent Mantisse
 0 10010111 00000000000000000000010
```

Dies entspricht der Dezimalzahl 16777220.

ii. Abschneiden nicht darstellbarer Stellen

Wir schneiden das Ergebnis nach der 23ten Nachkommastelle ab und erhalten die gerundete Zahl: $1{,}00000000000000000000000 \cdot 2^{24}$

```
VZ Exponent Mantisse
 0 10010111 00000000000000000000000
```

Wir addieren z_1 hinzu:

z_1: e = 0, m = 1,001

Wir passen zunächst den Exponenten von z_1 auf 24 an:

$1{,}001 \cdot 2^0 = 0{,}000000000000000000000001001 \cdot 2^{24}$

Nun werden die Mantissen addiert:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1{,}00000000000000000000000 \\
+ & \underline{0{,}000000000000000000000001001} \quad (z_1) \\
 & 1{,}000000000000000000000001001
\end{array}
$$

Wir schneiden das Ergebnis nach der 23ten Nachkommastelle ab:

$1{,}00000000000000000000000 \cdot 2^{24}$

```
VZ Exponent Mantisse
 0 10010111 00000000000000000000000
```

Dies entspricht der Dezimalzahl 16777216.

Antwort: Bei der ersten Rechnung erhält man mit beiden Rundungsmethoden das Ergebnis von 16777218. Dieses kommt dem erwarteten Ergebnis 16777218,625 am Nächsten.

c) Vom Aufgabenteil a) wissen wir, dass bei der Konvertierung der Zahl 1677716 bereits einmal normalisiert werden musste.

<u>16777218 in IEEE 754 (32Bit)</u>

1. Dezimalzahl in Binärzahl umwandeln
   $\rightarrow 16777218_{10} = 1000000000000000000000000_2$

2. Normalisierung
   $1000000000000000000000010_2 = 1{,}0000000000000000000000001 \cdot 2^{24}$

   Hier wurde das zweite Mal normalisiert!

3. Vorzeichenbit (VZ) bestimmen
   Die Zahl ist positiv, also hat das Vorzeichenbit den Wert 0.

4. Exponent berechnen
   darzustellender Exponent = Exponent + Bias = 24 + 127 = 151
   Exponent als Binärzahl: 10010111

5. Gleitkommazahl bilden
   Die Mantisse stellt den Nachkommateil der normalisierten Binärzahl dar.

```
VZ Exponent Mantisse
 0 10010111 00000000000000000000001
```

Subtraktion:

→ Da beide Exponenten gleich sind, müssen diese nicht angepasst werden.

Nun werden die Mantissen subtrahiert:

```
  1,00000000000000000000001  (16777218)
- 1,00000000000000000000000  (16777216)
  0,00000000000000000000001
```

Ergebnis normalisieren (3.Normalisierung):

$0{,}00000000000000000000001 \cdot 2^{24} = 1{,}0 \cdot 2^{1}$

darzustellender Exponent = 1 + 127 = 128

$128_{10} = 10000000_{2}$

```
VZ Exponent Mantisse
 0 10000000 00000000000000000000000
```

Dies entspricht der Dezimalzahl 2

Antwort: Es muss dreimal normalisiert werden!